

ЗАКОНИ ПОТОКІВ МЕРЕЖ ПРИ МАКСИМАЛЬНОМУ ЗБАГАЧЕННІ В ЧАСІ

Розглянуто модель мережі з урахуванням пропускних здатностей гілок і при узгодженні потоків на різних логістичних рівнях. Наведно приклади застосування законів «альфа» та «бета» для аналізу мереж. Електроенергетична мережа може досліджуватись на базі трьох систем взаємно пов'язаних та взаємно суперечливих законів: Кірхгофа, «альфа» та «бета». «Електричні» схеми заміщення мереж з потоками відрізняються від звичайних електричних схем, що потрібно ураховувати при застосуванні методів теоретичних основ електротехніки.

Ключові слова: Розрахунок потоків мережі, пропускні здатності, матриця Леонтьєва, закони Кірхгофа, збагачення у часі.

Рассматривается модель сети с учетом пропускных способностей ветвей и при согласовании потоков на разных логистических уровнях. Приводятся примеры применения законов «альфа» и «бета» для анализа сетей. Электроэнергетическая сеть может исследоваться на базе трех систем взаимно связанных и взаимно противоречивых законов: Кирхгофа, «альфа» та «бета». «Электрические» схемы замещения сетей с потоками отличаются от обычных электрических схем, что необходимо учитывать при применении методов теоретических основ электротехники.

Ключевые слова: Расчет потоков сети, пропускные возможности, матрица Леонтьева, законы Кирхгофа, обогащение во времени.

It is taken into consideration model of network in accordance with edge's carrying capacity while coordination of flows in the different logistical levels occurs. The examples are given of «alpha's» and «beta's» laws application for network's analysis. Electrical power network can be investigated on the basis of Kirchhoff's, «alpha's» and «beta's» laws. «The electrical» schemes with flows differ from electrical ones, that must be taken into account when using theoretical methods of electrical engineering.

Key words: Calculation of the net's flows, carrying capacity of edge, Leontief's matrix, Kirchhoff's laws, enrichment in time.

Постановка проблеми. Мережі з потоками (фінансів, інформації, струмів, нафти) мають величезне значення в економіці [1; 2; 6; 7], але при цьому не ураховується головний напрям економічної діяльності – узгодження потоків при максимальному збагаченні у часі [3-5].

Аналіз досліджень та публікацій. Неорієнтований граф як електричну мережу з вхідним потоком та її аналізом на базі законів Кірхгофа був уперше розглянутий у роботі [7]. У роботах [4; 5] був продовжений цей напрям. Розподіл потоків у мережі можна отримати за матричним рівнянням міжтоварного балансу [5] (варіант матриці міжгалузевого

балансу Леонтьєва), кожний рядок якого описує потоки товару чи напівфабрикату у вузлі мережі (рис. 1 (а))

$$x_{j0} = A_j x_{j0} + x_{j1},$$

де $j = 1, 2, \dots, n$ – порядковий номер товару-вузла з випуском продукції x_{j0} ;

x_{j0} – загальна кількість випущеної j – ої продукції (товару чи напівфабрикату [5]);

x_{j1} – продукція (товар чи напівфабрикат [5]) для продажу;

$A_j \leq 1$ – постійний коефіцієнт, що ураховує споживання x_{j0} всіма n товарами.

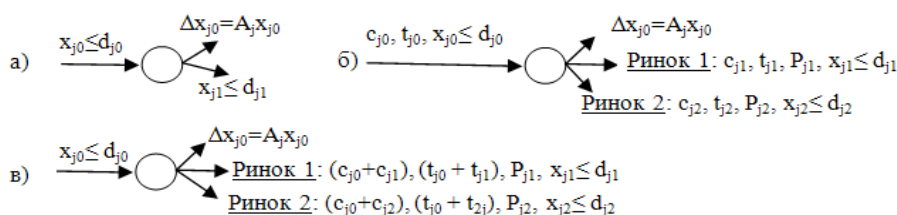


Рис. 1. Розгалуження потоків у j -му вузлі мережі (d_{j0} – виробнича потужність; d_{j1}, d_{j2} – дозволені об'єми реалізації j -го товару на Ринку 1 та Ринку 2): а) – згідно j -го рядка матричного рівняння міжтоварного балансу; б) – потоки j -го вузла, що розглядається; в) – вузол, еквівалентний вузлу (б).

На рис. 1 (б) введені позначення: x_{j0} – потік продукції; c_{j0} – собівартість одиниці продукції потоку x_{j0} на момент розгалуження потоків; t_{j0} – повний час на придбання сировини, виготовлення та транспортування одиниці продукції до вузла; $x_{j0} \leq d_{j0}$ – обмеження виробничої потужності з випуску продукції x_{j0} ; $\Delta x_{j0} = A_j x_{j0}$ – частка продукції x_{j0} , яка ураховує норми використання продукції x_{j0} всіма n товарами та напівфабрикатами. На рис. 1 (б) наведені показники Ринку 1 та Ринку 2: (c_{j1}, c_{j2}) – вартість транспортування, збереження та продажу одиниці продукції на ринках; (t_{j1}, t_{j2}) – час на транспортування до ринків, збереження та продаж одиниці продукції; (P_{j1}, P_{j2}) – прибуток від продажу одиниці продукції; (x_{j1}, x_{j2}) – реальні потоки j -го товару на ринках; $(x_{j1} \leq d_{j1}, x_{j2} \leq d_{j2})$ – дозволений об'єм реалізації j -го товару на ринках. На рівні підприємств кожний окремих потік товарів у вузлі отримується на основі максимального збагачення у часі [3; 5].

Метою статті є введення маркетингової орієнтації у дослідженні мереж.

Виклад основного матеріалу. *Визначення максимальної інтенсифікації потоків прибутків.* На основі даних всіх вузлів типу рис. 1 (в) (який є еквівалентним вузлу рис. 1 (б)) функція мети при максимальній інтенсифікації потоків прибутків дорівнює [3–5]

$$F_1 = \sum_{j=1}^n \left(\frac{P_{j1}}{t_{j1}} x_{j1} + \frac{P_{j2}}{t_{j2}} x_{j2} \right) \rightarrow \max. \quad (1)$$

Для отримання розв'язку в середовищі MathCAD з використанням функції «*maximize*» для функції мети (1), можна застосувати рівняння щодо суми потоків у всіх вузлах (рис. 1 (в)), яке повторює перефразований закон Кірхгофа для струмів у вузлі

$$(1 - A_j) x_{j0} - x_{j1} - x_{j2} = 0, \quad (2)$$

та обмежити нерівностями величини потоків зверху та знизу, наприклад:

$$x_{j0} \leq d_{j0}; \quad x_{j1} \leq d_{j1}; \quad x_{j2} \leq d_{j2};$$

$$x_{j0} \geq 0; \quad x_{j1} \geq 0; \quad x_{j2} \geq 0. \quad (3)$$

Визначення максимального потоку в мережі. На рис. 2 максимальний потік мережі потоків з пропускними здатностями гілок S_{ij} позначений як « $Q_m=19$ ».

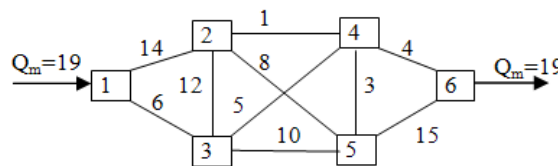


Рис. 2. Мережа з обмеженнями пропускних здатностей гілок.

Позитивне спрямування потоків гілок приймаємо від вершини з меншим номером до вершини з більшим номером. У такій мережі лише потоки вхідних або вихідних гілок є невід'ємними, а потоки інших гілок можуть змінювати напрям на негативний. Розрахунок *максимального потоку* « $Q_m=19$ » мережі виконується на основі підсумку потоків у вузлах та обмежень 2 в MathCAD з максимізацією вхідних (або вихідних) потоків за функцією:

$$F(x_{12}, x_{13}, x_{23}, x_{24}, x_{25}, x_{34}, x_{35}, x_{45}, x_{46}, x_{56}) = x_{12} + x_{13} \rightarrow \max.$$

Змінні по мінімуму не обмежуються, бо вони можуть змінювати знак (крім потоків входу та виходу). Якщо *потік повинен бути менше максимального значення* ($Q_m \leq 12$), то в попередню

математичну модель у розділі GIVEN вводимо нерівність $x_{12} + x_{13} \leq 12$.

У MathCAD 15.0 SolveBlocks може вміщувати до **8192 лінійних нерівностей** (кількість вузлів буде меншою, наприклад, 1000) та до **200 нелінійних нерівностей**, що цілком достатньо для аналізу достатньо складних мереж.

Використання законів «альфа» та «бета» для аналізу потоків. Мережу рис. 2 можна замінити схемою заміщення рис. 3 при введенні в кожну гілку «активного опору» $R_{ij} = 1/S_{ij}$ з падінням «тиску потоку» $u_{ij} = u_i - u_j = q_{ij} R_{ij} = q_{ij} / S_{ij}$ на активному опорі R_{ij} (тут u_i, u_j – тиски вершин i та j ; бажано, щоб $u_{ij} = q_{ij} / S_{ij} \leq 1$) [5,7].

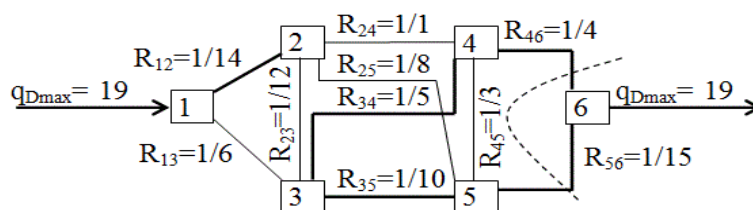


Рис. 3. Електроенергетична мережа з максимальним потоком $Q_m = 19$

Законои «альфа» є перефразованими законами Кірхгофа для мереж з обмеженими потоками. Для (n-1) вузлів рис. 3 (вузли 2-6) складаємо п'ять рівностей для потоків α

$$\begin{aligned} q_{12} - q_{24} - q_{25} - q_{23} &= 0; \\ q_{13} + q_{23} - q_{34} - q_{35} &= 0; \\ q_{24} + q_{34} - q_{45} - q_{46} &= 0; \\ q_{25} + q_{35} + q_{45} - q_{56} &= 0; \quad q_{12} + q_{13} - q_{46} - q_{56} = 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Згідно другого закону складаємо систему рівнянь для контурів з потоками α :

$$\begin{aligned} -q_{34}/5 - q_{45}/3 + q_{35}/10 &= 0; \\ -q_{46}/4 + q_{56}/15 + q_{45}/3 &= 0; \\ -q_{23}/12 - q_{35}/10 + q_{25}/8 &= 0; \\ -q_{24}/1 - q_{45}/3 + q_{25}/8 &= 0; \\ -q_{12}/14 - q_{23}/12 + q_{13}/6 &= 0. \end{aligned} \quad (5)$$

Результати розв'язку системи рівнянь (4), (5) для потоків α представлено в табл. 1. У діалоговому режимі ми замінюємо рівняння для контурів (5) на $q_{13} = 6; q_{46} = 4; q_{13} = 8; q_{24} = 0; q_{45} = 0$. В результаті ми отримуємо данні табл. 2 для потоків β [5].

Таблиця 1

Результати розв'язку системи рівнянь (4), (5) для потоків α

Змінні (потоки)	q ₁₂	q ₁₃	q ₂₃	q ₂₄	q ₂₅	q ₃₄	q ₃₅	q ₄₅	q ₄₆	q ₅₆
Пропускна здатність	14	6	12	1	8	5	10	3	4	15
Розв'язок	12,1	6,88	3,37	0,939	7,81	3,29	6,96	0,112	4,12	14,88

Таблиця 2

Результати розв'язку системи рівнянь для потоків β

Змінні (потоки)	q ₁₂	q ₁₃	q ₂₃	q ₂₄	q ₂₅	q ₃₄	q ₃₅	q ₄₅	q ₄₆	q ₅₆
Пропускна здатність	14	6	12	1	8	5	10	3	4	15
Розв'язок	13	6	5	0	8	4	7	0	4	15

Законои «альфа» та «бета» [4; 5] виділені окремо від законів Кірхгофа з методологічної точки зору: закони «бета» отримуються з математичної моделі за законами «альфа» і можуть **прямо суперечити законам Кірхгофа** (падіння тиску вздовж замкненого контуру не дорівнює нулю; може не співпадати кількість рівнянь для потоків у вузлах); у матриці Леонтьєва та в транспортній задачі кількість рівнянь для потоків у вузлах дорівнює кількості вузлів; результати аналізу за законами «альфа» та «бета» в електричній мережі потребує обов'язкової перевірки за законами Кірхгофа; частка електричної мережі може аналізуватись за законами «альфа» та «бета», а друга частка мережі – за законами Кірхгофа з урахуванням даних джерелами потоків; є потреба порівнювати між собою аналізи за законами Кірхгофа, «альфа» та «бета».

Законои β («бета») розподілу максимального потоку по гілках мережі дозволяють створити математичну модель, яка точно відображує розподіл потоків по гілках мережі згідно методу поміток Форда-Фалкерсона, і мають вигляд:

1. Алгебраїчна сума потоків β у вершинах дорівнює нулю. Кількість рівнянь для потоків β у вузлах може бути рівною n та рівною, чи меншою за (n-1). Рівняння «бета» можуть складатись лише з рівнянь для джерел потоків у гілках.

2. Отримані при максимальному потоці по законах «альфа» вирази для контурів із перевантаженими гілками замінюються виразами згідно з наведеними нижче законами «бета»:

– рівняння для контуру з перевантаженою (i,j) – гілкою замінюється рівнянням джерела потоку

(змінною перевантаженої гілки, рівною пропускній здатності гілки)

$$q_{\beta ij} = S_{ij}; \quad (6)$$

– для цілком завантажених до пропускної здатності гілок алгебраїчна сума падінь тисків потоків β вздовж не замкненого реального чи умовного контуру дорівнює підсумку відповідних знакозмінних одиниць цілком завантажених гілок

$$\sum [\pm q_{\beta ij} / S_{ij}] = \sum \pm 1_{ij}, \quad (7)$$

де знак одиниці « $\pm 1_{ij}$ » залежить від напрямку обходу реального чи умовного (не замкненого) «контуру»;

– рівняння для контуру по потоках «альфа» можна замінити рівнянням джерела потоку по законах «бета» з числовим значенням змінної гілки (розрахованій по законах «альфа») величині недовантаженого потоку ($q_{\alpha ij} < S_{ij}$)

$$q_{\beta ij} = q_{\alpha ij}. \quad (8)$$

При використанні максимального потоку та заміні виразу за законами «альфа» на вираз за законами «бета» виконується новий розрахунок для підтвердження відсутності перевантажених гілок. Розподіл потоків за законами β може бути нескінченна кількість.

Розглянемо випуск товарів з урахуванням логістичних та маркетингових умов. Задача дослідження операцій розв'язується залежно від наявних ресурсів, норм витрат та прибутковості. При цьому звичайно не ураховується можливість обмеження потоків у

мережі. Припустимо, що потрібно визначити найбільшу прибутковість виробництва Виробу 1 та Виробу 2 при даних, які наведені в табл. 3 з урахуванням часу та даних ринку табл. 4. У

табл. 3 «Вартість виробництва» та «Середній час t_1 виробництва 1 шт.» урахують усі витрати коштів та часу на вироблення одиниці продукції, починаючи з вартості придбання сировини.

Таблиця 3

Дані для планування випуску продукції

Ресурс			Норми витрат ресурсу	
Назва	Запаси на складі	Обмеження транспортування	Вироб 1	Вироб 2
Гроші	30 грн	1000 грн/добу	19,5 грн/шт	11,6 грн/шт
Сировина	15 м ²	50 м ² /добу	0,075 м ² /шт	0,12 м ² /шт
Потік випущеної продукції за добу, шт./добу			x_1	x_2
Середній час t_1 виробництва 1 шт., годин/шт.			0,02	0,3
Виробнича потужність, шт./добу			30	100
Вартість виробництва 1 шт., грн/шт.			21	14

Таблиця 4

Дані по ринках

Данні ринків по 1 шт. товару	Вироб 1, ринок 2	Вироб 1, ринок 7	Вироб 2, ринок 3	Вироб 2, ринок 1
Середній час t_2 транспортування 1 шт., годин/шт.	0,2	0,7	0,03	0,1
Вартість транспортування 1 шт., грн/шт.	3	4	1	2
Середній час t_3 продажу 1 шт., годин/шт.	0,1	0,01	0,02	0,1
Витрати на продаж 1 шт., грн/шт.	1	4	3	1
Квоти, шт.	50	30	10	7
Продаж, шт./добу.	y_1	y_2	y_3	y_4
Загальний час $T = (t_1 + t_2 + t_3)$ виробництва та продажу 1 шт., годин/шт.	0,32	0,73	0,35	0,5
Собівартість 1 шт. на ринку, грн/шт.	25	29	18	17
Ціна на ринку 1 шт., грн/шт.	26,5	31	18,8	17,9
Прибуток за 1 шт., грн/шт	1,5	2,0	0,8	0,9
Інтенсивність отримання прибутку у часі за 1 шт., грн/годину	1,5:0,32= =4,69	2,0:0,73= =2,74	0,8:0,35= =2,28	0,9:0,5= =1,8

Вважаємо, що запаси ресурсів на складах вміщують лише матеріали для поточного виробництва. Ураховуємо: обмеження по виробництву товарів, по

квотах на ринках; вартість транспортування і продажу товарів. Розв'язок задачі показаний на рис. 4.

ORIGIN = 1 (Розрахунок потоків товарів на підприємстві)

$F2(x_1, x_2, y_1, y_2, y_3, y_4) = 4.69y_1 + 2.74y_2 + 2.28y_3 + 1.8y_4$ (Функція мети)

$x_1 = 0 \quad x_2 = 0 \quad y_1 = 0 \quad y_2 = 0 \quad y_3 = 0 \quad y_4 = 0$

GIVEN

$19.5x_1 + 11.6x_2 \leq 1000 \quad 0.075x_1 + 0.12x_2 \leq 50$ (Обмежене транспортування ресурсів)

$x_1 - y_1 - y_2 = 0 \quad x_2 - y_3 - y_4 = 0$ (Обмеження по потоках)

$x_1 \leq 30 \quad x_2 \leq 100$ (Обмеження по виробничій потужності)

$y_1 \leq 50 \quad y_2 \leq 30 \quad y_3 \leq 10 \quad y_4 \leq 7$ (Обмеження по квотах на ринках)

$x_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 0 \quad y_1 \geq 0 \quad y_2 \geq 0 \quad y_3 \geq 0 \quad y_4 \geq 0$

$P2 = \text{Maximize}(F2, x_1, x_2, y_1, y_2, y_3, y_4)$

$P2^T = (30 \quad 17 \quad 30 \quad 0 \quad 10 \quad 7)$

$A2 = 0 \quad FF2 = \begin{cases} \text{for } i \in 1..4 \\ A2 \leftarrow A2 + P2_{i+2} \cdot G2_i \\ A2 \end{cases}$

$FF2 = 176.1$

$G2 = \begin{pmatrix} 4.69 \\ 2.74 \\ 2.28 \\ 1.8 \end{pmatrix}$

Рис. 4. Оптимізація виробництва товарів (середовище MathCAD)

Матрицю міжтоварного балансу $X=AX+Y$ можна доповнити векторами інтенсифікації прибутків P_R для кожного ринку R з елементами $\|p_{jR}\| / \|t_{jR}\|$, при $j = 1, 2, \dots, n$, які вкажуть товари та ринок R , що забезпечують максимальне збагачення у часі (тут $\|p_{jR}\|$ – прибуток для j -го товару на ринку R ; $\|t_{jR}\|$ – витрата часу на придбання або виробництво, на перевезення та зберігання, на продаж на ринку R).

Висновки

1. Отримані моделі для розподілу потоків при максимальному збагаченні у часі.
2. Для мережі з n вершинами та m гілками при кількості змінних m , в першу чергу на основі законів «бета» потрібно замінювати рівняння для $[m-(n-1)]$ контурів.

3. Кількість рівнянь для потоків «бета» у вузлах може бути рівною n та рівною, чи меншою за $(n-1)$. Рівняння «бета» можуть урахувати рівняння для потоків в усіх вузлах чи рівняння для частки вузлів із $(n-1)$, доповнених іншими залежностями.

4. Електроенергетична мережа може досліджуватись на базі трьох систем взаємно пов'язаних та взаємно суперечливих законів: Кірхгофа, «альфа» та «бета».

«Електричні» схеми заміщення мереж з потоками відрізняються від звичайних електричних схем, що потрібно урахувати при застосуванні електротехнічних методів аналізу.

5. Якщо частка мережі аналізується за законами «альфа» та «бета», то інша частка, що аналізується за законами Кірхгофа, може бути урахована джерелами потоків.

ЛІТЕРАТУРА

1. Зайченко Ю. П. Дослідження операцій / Ю. П. Зайченко. – К. : Видавничий Дім «Слово», 2006. – 816 с.
2. Костін В. Н. Оптимизационные задачи электротехники / В. Н. Костін. – СПб. : СЗТУ, 2003. – 120 с.
3. Кутковецький В. Я. Дослідження операцій : [підручник] / В. Я. Кутковецький. – Миколаїв : Вид-во МДГУ ім. Петра Могили, 2007. – Том 1. – 312 с. – Том 2. – 272 с.
4. Кутковецький В. Я. Теоретичні основи мереж потоків / В. Я. Кутковецький // Наукові праці : науково-методичний журнал. – Миколаїв : Вид-во ЧДУ ім. Петра Могили, 2011. – Вип. 148. – Т. 160. Комп'ютерні технології. – С. 173–183.
5. Кутковецький В. Я. Оптимізація економічних показників комплексної логістики при максимальному збагаченні у часі // Наукові праці : науково-методичний журнал / В. Я. Кутковецький. – Миколаїв : Вид-во ЧДУ ім. Петра Могили, 2012. – Вип. 179. – Т. 191. Комп'ютерні технології. – С. 32–38.
6. Труфанов А. (n. d.) Алгоритмы нахождения максимального потока [Электронный ресурс] / А. Труфанов. – Режим доступу : <http://algotlist.manual.ru/maths/graphs/maxflows/>.
7. Electrical Flows, Laplacian Systems, an Faster Approximation of Maximum Flow in Undirected Graph / [Christiano P., Kelner J.A., Madry A., Shang-Hua Teng, Speelman D.].

Рецензенти: Дихта Л. М., д.т.н., професор;
Мещанінов О. П., д.пед.н., професор.

© Кутковецький В. Я., 2013

Дата надходження статті до редколегії 28.03.2013 р.

КУТКОВЕЦЬКИЙ Валентин Якович, д.т.н., професор, професор кафедри інформаційних технологій Чорноморського державного університету імені Петра Могили, м. Миколаїв, Україна. Сфера наукових інтересів: моделювання за допомогою ЕОМ процесів в електрообладнанні, теоретичні основи електротехніки, напівпровідникові перетворювачі електричної енергії, дослідження операцій.